數學傳播　49卷4期, pp. 56-72

畢氏定理的三角學證明: I
一個傳了近百年的錯誤說法和近來的發展

冼鏡光

1. 前言

2023年3月18日, 兩位美國高中女生 Ne'Kiya D. Jackson 和 Calcea Rujean Johnson (以下簡稱 Jackson-Johnson) 在美國數學學會 (American Mathematical Society、簡稱爲 AMS) 的東南區春季會議中發表一篇論文摘要並且演講, 題目爲 An Impossible Proof of Pythagoras [8]。這篇論文摘要和演講在美國媒體出盡風頭, 報章、雜誌、電視都大幅報導, 有些媒體甚至說這兩位高中生完成了 2000 多年數學家沒做到的工作。那麼, 那篇文章題目裡頭的 impossible 意義爲何? 那個證明又證明了什麼? 究竟 2000 多年來數學家真的沒做到? 還是媒體甚至一些數學家們搞錯了呢? 本文的主旨就在探討這幾個問題。本文所需的基礎知識只有高中平面幾何和平面三角學, 了解這幾個問題和答案的來龍去脈之後, 日後再進一步探討比較技術層面的課題。

先說明兩個名詞。畢氏定理指的是一個直角三角形中, 兩個直角邊長的平方和等於斜邊長的平方。*畢氏等式* (Pythagorean Identity) 則是 $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$, 此地 x 是一個實數 (複數不在本文探討範圍)。縱使畢氏等式接受一個任意實數、而畢氏定理是有關直角三角形, 但兩者事實上是等價的。因爲透過對稱和週期性質, 我們可以把一個任意實數值化簡到一個正銳角、也就是直角三角形中的一個銳角。因此證明了畢氏定理相當於證明了畢氏等式, 反之亦然。所以, 本文都假設角度是在開區間 $(0, 90°)$ 內。

接下來, 本文先討論這個錯誤說法的起源 (1940 年 Loomis 寫的書) 以及原作者的說法 (第 2 節)。其次是有多少人相信的問題 (第 3 節), 真實的統計數字不可得, 我們只能從一些知名人士和媒體報導得知一二。下一個論題是一篇近來被廣泛引用的文章 (第 4 節), 這篇 2009 年文章不用畢氏定理和畢氏等式證明餘弦的角差等式、由此證明畢氏等式, 從而引伸出這篇文章的原創性; 答案當然不是原創, 因爲在一百多年前的解析幾何課本中就有相同的做法。從比 Loomis 著作更早的書籍中我們知道 Loomis 的說法不正確, 或許當時通訊不如今天發達, 但 Loomis 引用了一本荷蘭文書籍、並且給出錯誤的批評卻是不爭的事實; 第 5 節和第 6 節討論一本德文和一本荷蘭文 (Loomis 引用的一本) 書籍的內容、並且指出 Loomis 和十多年前被廣爲引用的一篇文章的不完備之處, 更有意思的是這些論題可以在 1850 年代以後的三角學和

解析 (或座標) 幾何課本旋轉座標軸的章節中找得到。下一組論題是 1996 年以後的發展 (第 7 節), 其中包含一位美國女高中生在 1996 年用三角學做的畢氏等式的證明, 但她卻沒得到 2023 年時 Jackson-Johnson 同樣的待遇; 比較有趣的是正切的角和以及角差等式的證明 (以下都用角和角差等式), 以及由此而導出的畢氏定理的證明, 這些證明都沒有用到畢氏定理和畢氏等式、而且相當簡單, 從而再次說明 Loomis 的說法是錯誤的。最後, 第 8 節是 Jackson-Johnson 的「不可能」證明, 不過此地的解釋和她們原來的證明有少許差異。第 9 節是本文結論。

2. 不可能 (Impossible) 的證明

這個不可能證明的說法來自一本近 100 年前的書, Elisha Loomis 的名著 *The Pythagorean Proposition* [15], 第一版是 1928 年、第二版是 1940 年, 這本書收羅了 370 個畢氏定理不同的證明。目前在網上可以找到 1940 年或以後的 PDF 版, 本文的討論以 1940 年版爲準。

NO TRIGONOMETRIC PROOFS

Facing forward the thoughtful reader may raise the question: Are there any proofs based upon the science of trigonometry or analytical geometry?

There are no trigonometric proofs, because all the fundamental formulae of trigonometry are themselves based upon the truth of the Pythagorean Theorem; because of this theorem we say $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, etc. Triginometry *is* because the Pythagorean Theorem *is*.

Therefore the so-styled Trigonometric Proof, given by J. Versluys, in his Book, Zes en Negentig Bewijzen, 1914 (a collection of 96 proofs), p. 94, proof 95, is not a proof since it employs the formula $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

圖 1: Loomis [15, 第244頁]書中的三段。

圖 1 是取自 Loomis 書中的 NO TRIGONOMETRIC PROOFS (沒有三角學的證明) 一節, 大意是說: 所有三角學的基礎公式都是植基於畢氏定理, 正因爲如此, 我們才有畢氏等式, 所以有畢氏定理才有三角學。不但如此, Loomis 也指出在他著作出現之前的 Versluys 書中畢氏定理的證明是錯的, 因爲 Versluys 在證明中用到畢氏等式。這一點我們稍後討論。正因爲 Loomis 這一段話 (畢氏定理沒有三角學證明), 於是那兩位女高中生用三角學證明畢氏定理就是一件「不可能」的任務。

Loomis這一段話在學界有不同的解讀。一派的說法是: Loomis 的“based upon”說法的意義是所有三角學公式都必須用畢氏定理證明、而沒有其它途徑。另一派的說法是: Loomis 並沒有排除其它的證明方式; 換言之, 三角學基本式子的證明也可能不必用到畢氏定理, 這麼說的

原因是這些基礎式子都「可以」(而不是必須) 用畢氏定理證明。筆者是比較傾向於前者的, 因爲 Loomis 直接了當地說「沒有三角學證明」。但因爲 Loomis 已經過世多年, 他的本意也只有他本人知道, 但也隨他一起長眠地下。

3. 究竟有多少人相信這個「不可能」的說法?

這是個好問題, 但恐怕沒有人會有正確的數字。不過, Loomis 的說法的確有人相信。譬如說, Bogomolny (已逝世) 在他知名度頗高的初等幾何網站上 [1] 就有如下的說法:

> Elisha Loomis、我自己而且毫無疑問地還有不少其他人以前相信、現在仍然相信無法用三角學證明畢氏定理, ⋯⋯。我很高興地承認我錯了。

前面提過, 這個「不可能」的證明被美國媒體 (含電視) 廣泛報導。很遺憾的是, 很多報導都在「不可能」上打轉; 譬如說, 知名雜誌 *Popular Mechanics* 的報導文章 [23] 有個副標題: “兩位高中生剛剛完成了數學家一直無法做到的事”。*Guardian* 這份報紙的報導 [34] 有如下的段落:

> 從該領域被發現之後, 數學家認爲用三角學證明畢氏定理會造成循環論證, 這是一個用自己證明自己的說法。

這一點是呼應 Loomis 說法的, 因爲 Loomis 說所有三角學中的基礎式子都是基於畢氏定理而來, 因此用三角學證明畢氏定理就是循環論證。

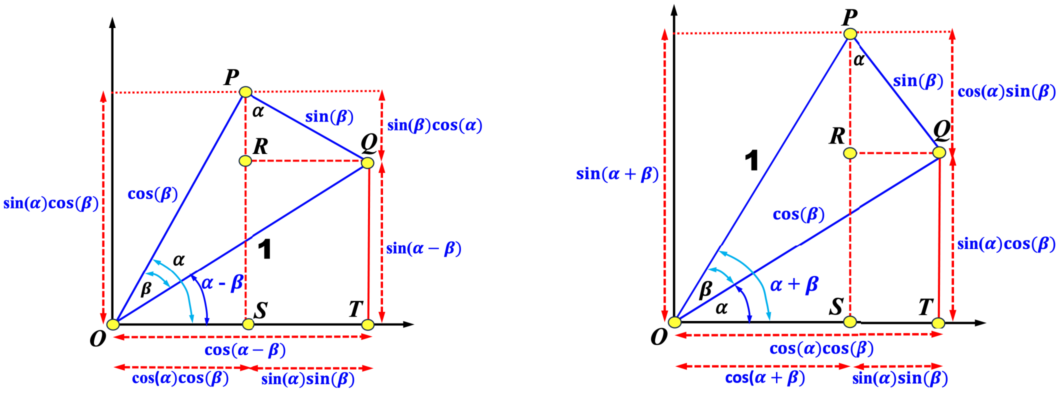
Scientific American 是一份比較慎重的雜誌, 使用比較平衡的報導, 提到 Zimba 在 2009 年的一篇文章 [36]、指出他不用畢氏定理和畢氏等式證明了餘弦函數的角差等式, 由此導出畢氏等式 (見下一節)。不過, 這並不是整個故事的終結、而是一連串追根究柢探索的開始, 因爲一個簡單的問題需要到 2000 多年後的 2009 年才會有解答嗎? 這是筆者開始深挖這個問題答案的原動力, 本文會儘可能介紹 2009 年前後的一些發展。

值得一提的是, 前述 Bogomolny 的說法是在 Zimba 的文章出現後加上去的。然而, 在現有可以容易查到已出版的資料中會發現 1996 年就有人不用畢氏定理和畢氏等式, 用三角學證明畢氏等式, 而且發表這篇短文的作者也是一位高中女生 (第 7.1 節)。筆者相信, 因爲這不是個難題, 台灣某些高中生或許也做出過類似的結果。

4. Zimba 的 2009 年文章

我們從 Zimba 的 2009 年的文章切入討論。從 Zimba 文章開始的原因十分簡單, 因爲這是近年來被引用非常多的作品, 並且被某些人譽爲最先用三角學證明畢氏等式之作; 當然這不是真的, 請看下一節。

在圖 2(a) 中, 假設 $\alpha \geq \beta$、而且 $\overleftrightarrow{OT}$ 爲橫軸。令直線 $\overleftrightarrow{OQ}$ 和 $\overleftrightarrow{OT}$ 的夾角爲 $\alpha - \beta$, 而 $\overline{OQ}$ 的長度爲 1。令直線 $\overleftrightarrow{OP}$ 和直線 $\overleftrightarrow{OQ}$ 的夾角爲 β, 於是 $\overleftrightarrow{OP}$ 和 $\overleftrightarrow{OT}$ 的夾角爲 α。令 Q 到 $\overleftrightarrow{OP}$ 和 $\overleftrightarrow{OT}$ 的垂足爲 P 和 T, 從 P 到 $\overleftrightarrow{OT}$ 的垂足爲 S, 從 Q 到 $\overleftrightarrow{PS}$ 的垂足爲 R。於是 $\triangle OQT$ 的直角邊爲 $\cos(\alpha-\beta)$ 和 $\sin(\alpha-\beta)$, 而 $\triangle OPQ$ 的直角邊爲 $\cos(\beta)$ 和 $\sin(\beta)$。因爲 $\triangle PQR$ 中 $\angle QPR = \alpha$, 它的直角邊可以從斜邊 $\overline{PQ} = \sin(\beta)$ 得出, 於是就很容易得到正弦和餘弦的角差等式; 在餘弦角差等式中令 $\alpha = \beta$ 就變成畢氏等式。



(a) 正弦餘弦的角差等式　　(b) 正弦餘弦的角和等式

圖 2: 角差等式和角和等式的證明

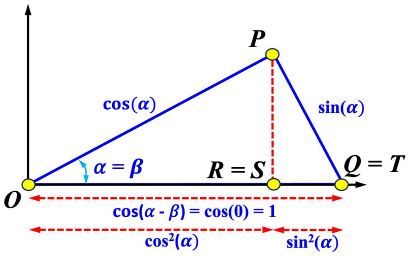
圖 2(b) 是角和等式的證明。與角差等式不同的是, Q 是從 P 到直線 $\overleftrightarrow{OQ}$ 的垂足, 而且 $\overline{OP} = 1$。$\angle POT$ 變成 $\alpha + \beta$, 而且 $\angle QOT$ 和 $\angle QOP$ 分別變成 α 和 β。其餘的步驟如圖所示, 所以不再重覆。

在往下討論之前, 我們看看圖 2 的特殊例子。如果 $\alpha = \beta, Q = T$ 而且 $R = S$ (圖 3(a))。因爲 $\overline{OQ} = \overline{OT} = 1$, 這也相當於 $\cos(\alpha-\beta) = \cos(0) = 1$, 所以得到一個顯而易見的畢氏等式證明。Givental [5, p. 264] 也有一個類似的證明, 不過是基於相似三角形; 這個證明來自《幾何原本》, 而且在 19 世紀常見於法文的初等幾何學教科書 [11], Loomis [15, p. 24] 書中也提到這個證明。[1]

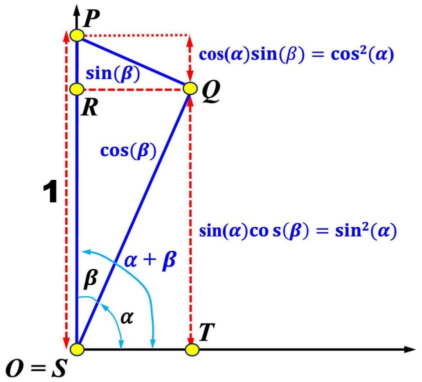
同樣地, 若圖 3(b) 中 $\alpha + \beta = 90^\circ$, P 和 R就都在縱軸上, 我們得到 $\overline{OP} = 1$、$\overline{PR} = \cos(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha)\sin(90^\circ - \alpha) = \cos^2(\alpha)$、$\overline{OR} = \sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha)\cos(90^\circ - \alpha) = \sin^2(\alpha)$。這也是一個顯而易見的畢氏等式證明, 它和圖 3(a) 完全一樣、只是橫豎不同。

看到此地, 您是否覺得這兩個圖似曾相識呢? 事實上, 在座標幾何課本中, 它們是用來解釋旋轉座標軸的!

[1] 事實上, 歐基里德並沒有用相似三角形直接證明畢氏定理, 但該命辭 (見 Heath [6, 頁 209 到頁 210], 第 6 冊命辭 8) 卻幾乎直接證明畢氏定理, 見 Legendre 的書 [11]。很有意思的是, 從近代的觀點來看, 書中每一個命辭都只有一個證明, 很多命辭明明多走一步就有對另一個命辭的證明, 但歐基里德卻止步了。爲什麼? 沒有人知道, 或許在歐基里德時代他的書是寫在羊皮紙上, 不如紙張發明後那麼方便。



(a) 當 Q 變成 T 而 R 變成 S

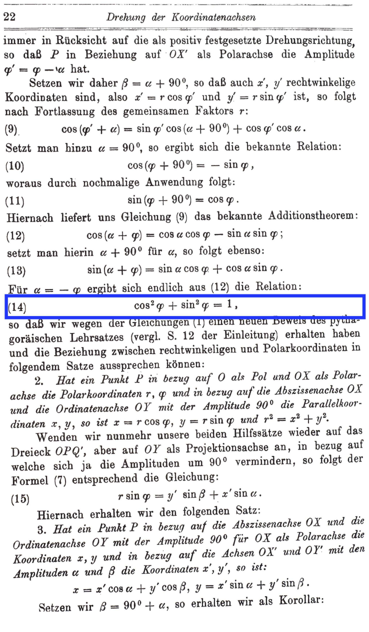


(b) 當 P 和 R 都在縱軸上

圖 3: 畢氏等式顯而易見的證明

5. Schur 的 1899 年的解析幾何課本

正因爲圖 2 和旋轉座標軸一樣, 那麼 Zimba 的證明應該很早就有了、在早期三角學和座標 (或解析) 幾何的書中就應該出現, 而不必等到 2009 年。順著這個思維往古書中找, 很快就在 Friedrich Schur 於 1899 年出的一本解析幾何課本 [26] 中找到了同樣的證明。圖 4(a) 是


22 *Drehung der Koordinatenachsen*

immer in Rücksicht auf die als positiv festgesetzte Drehungsrichtung, so daß P in Beziehung auf OX' als Polarachse die Amplitude $\varphi' = \varphi - \alpha$ hat.

Setzen wir daher $\beta = \alpha + 90^0$, so daß auch x', y' rechtwinkelige Koordinaten sind, also $x' = r\cos\varphi'$ und $y' = r\sin\varphi'$ ist, so folgt nach Fortlassung des gemeinsamen Faktors r:

(9) $\cos(\varphi' + \alpha) = \sin\varphi' \cos(\alpha + 90^0) + \cos\varphi' \cos\alpha.$

Setzt man hinzu $\alpha = 90^0$, so ergibt sich die bekannte Relation:

(10) $\cos(\varphi + 90^0) = -\sin\varphi,$

woraus durch nochmalige Anwendung folgt:

(11) $\sin(\varphi + 90^0) = \cos\varphi.$

Hiernach liefert uns Gleichung (9) das bekannte Additionstheorem:

(12) $\cos(\alpha + \varphi) = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi;$

setzt man hierin $\alpha + 90^0$ für α, so folgt ebenso:

(13) $\sin(\alpha + \varphi) = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi.$

Für $\alpha = -\varphi$ ergibt sich endlich aus (12) die Relation:

(14) $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$

so daß wir wegen der Gleichungen (1) einen neuen Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes (vergl. S. 12 der Einleitung) erhalten haben und die Beziehung zwischen rechtwinkeligen und Polarkoordinaten in folgendem Satze aussprechen können:

2. *Hat ein Punkt P in bezug auf O als Pol und OX als Polarachse die Polarkoordinaten r, φ und in bezug auf die Abszissenachse OX und die Ordinatenachse OY mit der Amplitude 90^0 die Parallelkoordinaten x, y, so ist $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $r^2 = x^2 + y^2$.*

Wenden wir nunmehr unsere beiden Hilfssätze wieder auf das Dreieck OPQ', aber auf OY als Projektionsachse an, in bezug auf welche sich ja die Amplituden um 90^0 vermindern, so folgt der Formel (7) entsprechend die Gleichung:

(15) $r\sin\varphi = y'\sin\beta + x'\sin\alpha.$

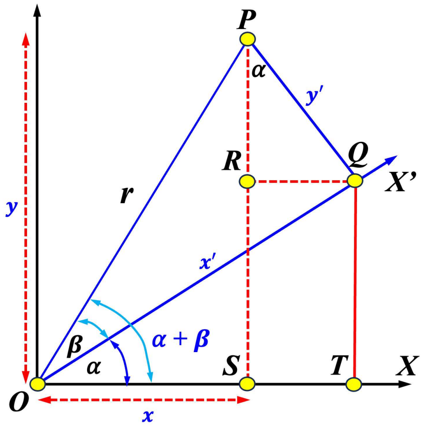
Hiernach erhalten wir den folgenden Satz:

3. *Hat ein Punkt P in bezug auf die Abszissenachse OX und die Ordinatenachse OY mit der Amplitude 90^0 für OX als Polarachse die Koordinaten x, y und in bezug auf die Achsen OX' und OY' mit den Amplituden α und β die Koordinaten x', y', so ist:*

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\beta, \quad y = x'\sin\alpha + y'\sin\beta.$$

Setzen wir $\beta = 90^0 + \alpha$, so erhalten wir als Korollar:

(a) Schur [26, 第22頁]



(b) 旋轉座標軸

圖 4: Schur 的書 (1899)

這本書的第 22 頁, 此地的是 1912 年版; 圖 4(b) 則是旋轉座標的示意圖。假設在原座標系統中點 P 的座標爲 (x, y), 座標軸旋轉 α 角之後 P 的座標爲 (x', y')。令 $\overleftrightarrow{OP}$ 和 X' 軸的夾角爲 β, 從 P 到 X' 軸的垂足爲 Q (請和圖 2(a) 比較), 又 $\overline{OP} = r > 0$。

從 (x', y') 到 (x, y) 的關係爲

$$\begin{aligned} x =& \overline{OS} = \overline{OT} - \overline{ST} = \overline{OT} - \overline{QR} = x'\cos(\alpha) - y'\sin(\alpha), \\ y =& \overline{PS} = \overline{PR} + \overline{RS} = \overline{PR} - \overline{QT} = y'\cos(\alpha) + x'\sin(\alpha). \end{aligned} \tag{1}$$

若 $r = 1$, 我們得到 $x = \cos(\alpha+\beta)$、$y = \sin(\alpha+\beta)$、$x' = \cos(\beta)$ 和 $y' = \sin(\beta)$。代入上式分別就是餘弦和正弦的角和等式!

再看從 (x, y) 到 (x', y') 的關係:

$$\begin{aligned} x' =& r\cos(\beta) = r\cos((\alpha+\beta)-\alpha) \\ =& r\left[\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha) + \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha)\right] \\ =& \left[r\cos(\alpha+\beta)\right]\cos(\alpha) + \left[r\sin(\alpha+\beta)\right]\sin(\alpha) \\ =& x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha), \\ y' =& r\sin(\beta) = r\sin((\alpha+\beta)-\alpha) \\ =& r\left[\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha) - \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha)\right] \\ =& \left[r\sin(\alpha+\beta)\right]\cos(\alpha) - \left[r\cos(\alpha+\beta)\right]\sin(\alpha) \\ =& y\cos(\alpha) - x\sin(\alpha). \end{aligned} \tag{2}$$

若 $r = 1$、$u = \alpha+\beta$、$v = \alpha$, 得到 $x = \cos(u)$、$y = \sin(u)$、$x' = \cos(u-v)$ 和 $y' = \sin(u-v)$, 於是座標旋轉的關係成爲餘弦和正弦的角差等式。

上述是 Schur 書中的做法, 它解釋了角和角差等式以及座標旋轉之間的連繫。因此, Zimba 的證明並非新創, 而是 100 多年前 1899 年教科書中的材料。

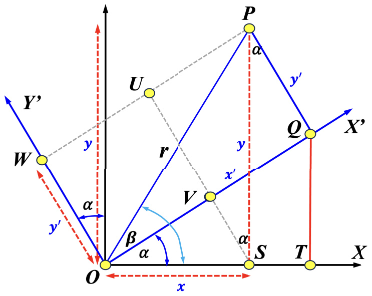


圖 5: 正弦和餘弦角差等式的另一個證明

從 (x, y) 到 (x', y') 的關係還有另一個常見的證明, 它不需要用到角和等式 (Robson [25, pp. 37–38])。圖 5 和圖 4(b) 是相似的, 不過標出了 Y' 軸。令從 P 到 Y' 軸的垂足爲 W

(所以 $\overline{OW} = y'$); 令從 S 到直線 $\overleftrightarrow{PW}$ 的垂足爲 U、而且直線 $\overleftrightarrow{US}$ 和 X 軸在 V 相交。因此我們得到

$$\begin{aligned} x' &= \overline{OQ} = \overline{OV} + \overline{VQ} = \overline{OV} + \overline{UP} = x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha), \\ y' &= \overline{PQ} = \overline{OW} = \overline{UV} = \overline{US} - \overline{VS} = y\cos(\alpha) - x\sin(\alpha). \end{aligned}$$

因此旋轉座標系統和正弦餘弦的角和角差等式息息相關, 而且也不需要使用畢氏等式。重要的是, 這些都是教科書中的標準教材, 比 Zimba 的文章早了至少 60 多年!

事實上, 十九世紀末和二十世紀初的不少座標 (或解析) 幾何的課本 (Fort [4, pp. 22-23] (1872)、Fine and Thompson [3, pp. 119–120] (1911)、劉毓璋 [13, pp. 634–635] (1974)、Loney [14, pp. 110-111] (1895) 和 Maxwell [19, p. 27] (1958)) 在講到座標旋轉時都只講到式子 (1) 就結束, 因爲這就足夠把 XY 座標轉換到 $X'Y'$ 座標。對式子 (2) 通常就用依此類推、或同理可證的方式, 有些課本則是當成解二元一次聯立方程式從 x' 和 y' 解出 x 和 y (相當於求式子 (1) 的反矩陣), 不過這就得用畢氏等式。不論如何, 單單式子 (1) 就可以導出正弦和餘弦角和等式, 從而證明畢氏等式, 請看下一節。

十九世紀後半不少三角學的課本都會討論投射基本原理(*The Fundamental Property of Projections*), 從這個原理直接導出正弦餘弦函數的角差角和公式是十分簡單的。譬如, 1849 年 de Morgen 的三角學 [2, pp. 22-23] 和 1891 年 Hobson 的三角學課本 [7, p.36]都有如此的討論。所以, 20世紀之前, 不用畢氏定理而導出正弦餘弦函數的角差角和公式在三角學課本中是常態, 而 Loomis 極有可能忽略了這些教科書。

6. Versluys 的 1914 年著作

J. Versluys 在 1914 年時出版一本收集了 96 個畢氏定理證明的書 [35], 這是 Loomis 指出犯了循環論證的那一本 (見圖 1), 而且 Zimba 的文章也引用了它。然而, Loomis 和 Zimba 都各犯了一個小錯誤, 使他們的指責不成立。Versluys 的書是荷蘭文寫的、而且流傳不廣, 本來就不很好找, 然而拜網路之賜, 我們可以找到數位版, 圖 6(a) 是 Versluys 書被 Loomis 指出有錯的那一頁, 圖 6(b) 是 Google Translate 的中文翻譯結果。

圖 6 中很明白地指出在三角學中通常不需要畢氏定理就可以證明正弦角和等式 (譬如第 5 節中 Schur 的證明), 然後指出若角 B 和角 C 的和爲 90° 時, 正弦角和等式就變成畢氏等式, 再用畢氏等式證明畢氏定理。證明角差角和等式不需要用到畢氏定理和畢氏等式已如上述, 因此 Versluys 對畢氏定理的證明沒有循環論證。Loomis 似乎忽略了書中開頭的第一句話, 因此對這個證明的批評是不正確的; 也許 Loomis 根深蒂固地認爲證明畢氏等式「必須」用到畢氏定理。

Zimba 也批評 Versluys 的證明, 圖 7 是 Zimba 文章中的一個腳註, 他指出 Schur 和

TRIGONOMETRISCH BEWIJS.

VIJF EN NEGENTIGSTE BEWIJS. In de driehoeksmeting wordt gewoonlijk zonder hulp van het theorema van Pythagoras aangetoond, dat

$$\sin (B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C.$$

Is nu $B + C = 90°$, dan is het eerste lid dezer formule 1 en we hebben $\cos C = \sin B$ en $\sin C = \cos B$, zoodat de formule wordt

$$1 = \sin^2 B + \cos^2 B.$$

Nu is in den rechthoekigen driehoek ABC, als A de rechte hoek is,

$$b^2 = a^2 \sin^2 B$$
$$c^2 = a^2 \cos^2 B$$
$$\overline{b^2 + c^2 = a^2.}$$

OPMERKINGEN. 1°. Dit bewijs wordt in 't voorbijgaan aangeduid in SCHUR, Lehrbuch der analytischen Geometrie, 1898.

2°. Als men dit bewijs zoo inricht, dat men de goniometrische verhoudingen vermijdt, door het bewijs van de eerste formule er in op te nemen, dan komt men op het bewijs door middel van de evenredigheid der zijden van driehoeken, die de hoeken gelijk hebben.

(a) Versluys 書的第 98 頁

三角學證明

第九十五證明。在三角學中，通常無需借助勾股定理即可證明：

$$\sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$$

如果$B+C=90°$，則公式的前半部為1，且$\cos C = \sin B$，$\sin C = \cos B$，因此公式變成：

$$1 = \sin^2 B + \cos^2 B$$

現在，在直角三角形ABC 中，設A 為直角，則：

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 \sin^2 B \\ c^2 &= a^2 \cos^2 B \\ &\cdots\cdots \\ b^2 + c^2 &= a^2 \end{aligned}$$

(b) 中文翻譯

圖 6: Versluys [35] 書中畢氏定理的證明

Versluys 證明中用來導出角和等式的圖在 $\alpha+\beta = 90°$ 時不適用, 但是圖 3(b) 正是這個特例的情況, 整個推導過程並沒有任何問題。若仔細閱讀 Zimba 的文章就會發現, 問題所在其實是他文章中發展出來的理論, 因爲他的理論中角度得在開區間 $(0, 90°)$ 內, 當然處理 $\alpha+\beta = 90°$ 時就有問題, 然而這卻不是傳統三角學理論的一部分。

總之, Loomis 和 Zimba 的批評都有問題, 但卻被不少人接受。如果能夠直接閱讀原文, 這些不正確的指責應該會降低很多。

[4] A similar maneuver was attempted in 1914 by J. Versluys, who took $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ and $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ in (2). Versluys cited Schur as the source of this idea (see [4, p.94]). A sign of trouble with the approach of Versluys/Schur is that the diagram typically used to derive the addition formula cannot be drawn for the case $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

圖 7: Zimba 文章 [36] 中的腳註 4

7. 一些近代的發展

前面討論過 20 世紀初期前後的結果, 本節探討 20 世紀末到目前的發展。幸運的是, 這些初等幾何與三角學的出版品在 `jstor.org` 網站上保存很多而且相當完整, 甚至於更早的作品都可以找得到。令人驚訝的是, 不知道是什麼原因, 許多近期的文章 (包含 Zimba 的文章在內) 似乎完全忽視了這些作品。本節主旨在於介紹從 1990 年代下半到 Jackson-Johnson 文章出現這近三十年來的結果。

7.1. 傳統證法

圖 8(a) 是 Rachel I. Mason 在 1996 年的證明 [18]。假設直角三角形 $\triangle ABC$ 中 $\angle C=90°$、$\angle A=\theta$、從 C 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 的垂足是 D, 因此高爲 $\overline{CD}$, 又 a、b、c 是角 A、B、C 的對邊。於是我們有下面的結果:

$$\overline{AD}=b\cdot\cos(\theta),\quad \overline{BD}=a\cdot\sin(\theta)\quad \text{和}\quad \overline{CD}=a\cdot\cos(\theta)=b\cdot\sin(\theta).$$

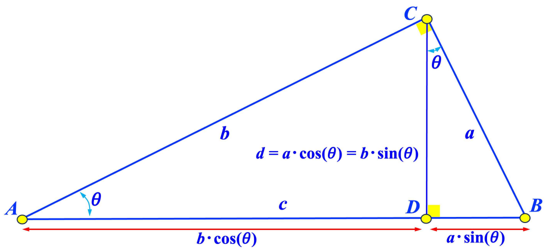
因爲 $c=\frac{b}{\cos(\theta)}$ 和 $c=\frac{a}{\sin(\theta)}$, 兩者相加得到,

$$2c=\frac{b\cdot\sin(\theta)+a\cdot\cos(\theta)}{\sin(\theta)\cos(\theta)}.$$

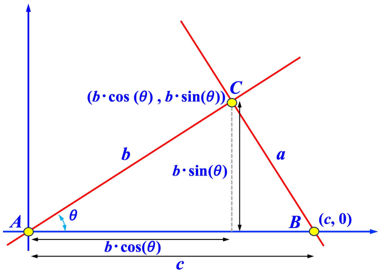
因爲 $c=b\cdot\cos(\theta)+a\cdot\sin(\theta)$, 代入上式得到:

$$b\sin(\theta)\left[2\cos^2(\theta)-1\right]+a\cos(\theta)\left[2\sin^2(\theta)-1\right]=0.$$

然而, 因爲 $\overline{CD}=b\cdot\sin(\theta)=a\cdot\cos(\theta)$, 約去這一項得到畢氏等式。



(a) Rachel I. Mason 的證明 (1996)



(b) Paul J. Maiorano 的證明 (1998)

圖 8: 兩個 1990 年代後半的證明

Mason 在文章中提到

> 我的創意數學老師 Angelo DiDomenico 對班上提出一個挑戰, 看是否能不用畢氏定理證明畢氏等式, 好奇心驅使下決定一試。

文末 Mason 提到 Class of 1995, 這表示她是 1995 年畢業班, 所以在寫這一篇文章時還是位高中女生, 但是她的作品卻被埋在浩瀚的文獻庫中, 雖然比 Zimba 的早 13 年、也比 Jackson-Johnson 的不可能證明早 20 多年, 卻沒有得到 Jackson 和 Johnson 一樣的媒體關注和 Zimba 文章的引用次數。正因爲這個證明比 Zimba 的簡單、更比 Jackson-Johnson 的短很多, 所以應該提出來參考, 相信台灣必定有高中生做出類似結果。然而, 台灣的高中老師是否會用類似問題挑戰學生則是在另一個層次; 另外, 是否有類似的更早的證明也難以查證。

下一個有趣的證明來自 Paul J. Maiorano [17], 使用的是很簡單的解析幾何技巧。在解析幾何中, 若一直線的斜率爲 $m \neq 0$, 則和它垂直的直線斜率爲 $-\frac{1}{m}$。請注意, 這個斜率關係並不需要用到畢氏定理和畢氏等式。

把直角三角形 $\triangle ABC$ 放到第一象限, 使 A 是原點、B 的座標爲 $(c, 0)$、於是 C 的座標就是 $(b\cdot\cos(\theta), b\cdot\sin(\theta))$ (圖 8(b))。直線 $\overleftrightarrow{AC}$ 的方程式爲 $y = m\cdot x = \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)x$, 直線 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式爲 $y = \left(-\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)(x-c)$。因爲 C 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上, 把座標 $x = b\cdot\cos(\theta)$ 和 $y = b\cdot\sin(\theta)$ 代入 $\overleftrightarrow{BC}$ 的方程式, 再用 $b = c\cdot\cos(\theta)$ 化簡, 就得到畢氏等式。

7.2. 無字證明

無字證明 (Proof Without Word, 簡稱 PWW) 是一種看圖就懂的證明, 當然這並非表示完全不用文字說明, 而是把文字的使用降到最低、充其量就是在圖上做些簡單標示; 圖 2 和圖 3 都是典型的角差角和、畢氏等式的無字證朋。要注意的是, PWW 通常只能提供足夠廣泛的證據, 在通例時得有更多的文字說明。有關 PWW 方面值得參考的是 Nelson 的三本書 [20, 21, 22], 這是收集來的很多 PWW 證明。

在 1999 年, Smiley 發表了正弦餘弦角和角差等式的證明 [31, 32], 不過他的證明和第 4 節的相比就不那麼淸晰易懂, 所以本文就略過而討論正切的角和角差等式。

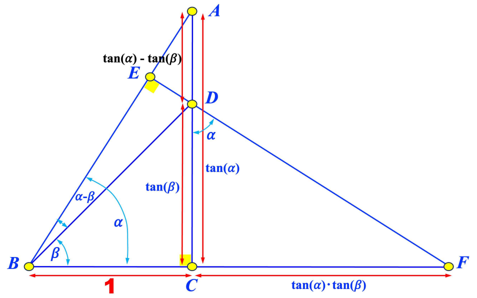
目前可以查到的最早 PWW 有關正切角差等式證明是 Suzuki [33] 在 1999 年做的, 之後 Kung [10] 在 2008 年證明了正切角和等式。以下的正切角差等式是 1999 年 Guanshen Ren [24] 做的 (圖 9(a))[2]。直角三角形 $\triangle ABC$ 中 $\angle B = \alpha$, D 爲邊 AC 上的一個點使 $\angle DBC = \beta$ (假設 $\alpha > \beta$), 於是 $\angle ABD = \alpha - \beta$。令 $\overline{BC} = 1$, E 爲 D 到邊 $\overline{AB}$ 的垂足, 而且 $\overleftrightarrow{DE}$ 和 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 F。因此, $\angle CDF = \angle EDA = \alpha$。圖 9(a) 中標出了各線段的長度。下面就是正切角差等式的證明:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\overline{ED}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{AD}\cdot\cos(\alpha)}{\overline{BF}\cdot\cos(\alpha)} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BF}} = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}.$$

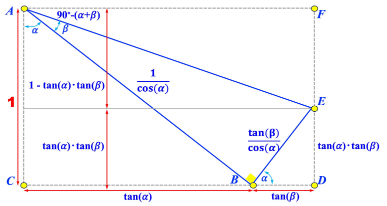
圖 9(b) 是正切角和等式的證明。在直角三角形 $\triangle ABC$ 中 $\angle C = 90°$、$\angle A = \alpha$。在直角三角形 $\triangle AEB$ 中, 令 $\angle BAE = \beta$、$\angle ABE = 90°$。令 E 到 $\overleftrightarrow{BC}$ 的垂足爲 D、到過 A 且與 $\overleftrightarrow{BC}$ 平行的直線的垂足爲 F, 於是 $ACDF$ 爲長方形。最後, 令 $\overline{AC} = 1$。

從上述的設定, 我們得到 $\overline{BC} = \tan(\alpha)$、$\overline{AB} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$。從 $\triangle ABE$ 得到 $\overline{BE} = \frac{\tan(\beta)}{\cos(\alpha)}$。因爲 $\angle DBE = \angle CAB = \alpha$, $\overline{ED} = \tan(\alpha)\tan(\beta)$ 且 $\overline{BD} = \tan(\beta)$。因此 $\overline{EF} =$

[2] 在 `jstor.org` 上不容易找到這篇文章。有興趣的讀者不妨用期刊名 *The College Mathematics Journal*, Vol. 30 (1999), No. 3, pp. i 212 以及 Front Matter 搜尋, 文章在最後一頁。



(a) 正切角差等式



(b) 正切角和等式

圖 9: 正切角差角和等式的PWW 證明

$1-\tan(\alpha)\tan(\beta)$。於是正切角和等式證明如次:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\cos(90^\circ-(\alpha+\beta))}{\sin(90^\circ-(\alpha+\beta))}=\frac{1}{\tan(90^\circ-(\alpha+\beta))}\\ &= \frac{1}{\left(\frac{\overline{EF}}{\overline{AF}}\right)}=\frac{\overline{AF}}{\overline{EF}}=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}.\end{aligned}$$

7.3. 用正切角和角差等式證明畢氏定理

從 Zimba 的 2009 年文章之後少有在此領域的文章, 但可以找到 Lengvárszky 在 2018 年的作品 [12], 它用正切函數的角和以及角差等式證明了畢氏定理。因爲上一節已經看過正切的角差角和等式的證明不需要用到畢氏定理和畢氏等式, Lengvárszky 在 2018 的證明並沒有循環論證。固然 Lengvárszky 的文章是在 2018 年發表、比 Zimba 的晚了九年, 但仍然比 Jackson-Johnson 的證明早了五年!

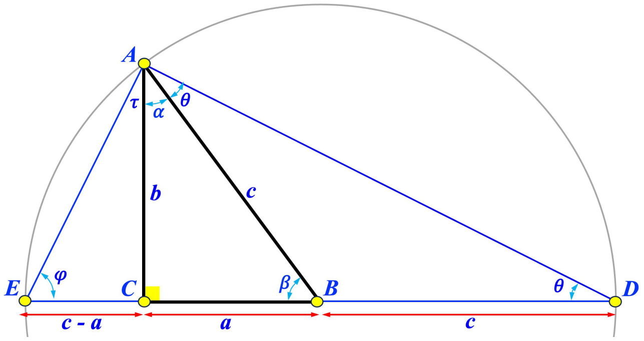


圖 10: 使用正切角和角差的畢氏定理證明

請看圖 10。$\triangle ABC$ 是直角三角形, $\angle C=90^\circ$ 而且 $a\le b$。以 B 爲圓心 c 爲半徑作圓, 它經過 A 並且和 $\overleftrightarrow{BC}$ 交於 E 和 D, 因此 $\triangle BAD$ 是等腰三角形, $\angle BAD=\angle BDA=\theta$。

爲方便計, 令 $\angle CAE = \tau$、$\angle CEA = \varphi$。我們很容易看出 $\overline{EC} = c - a$ 和 $\overline{DC} = a + c$。於是正切的角和等式給出:

$$\frac{a+c}{b} = \tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\theta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\theta)} = \frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a+c}}{1-\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a+c}}.$$

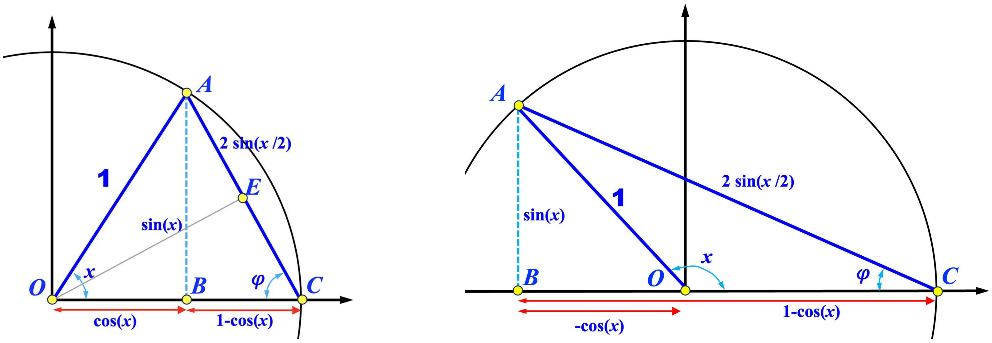
化簡後就是畢氏定理。

接著看如何使用正切角差等式。因爲 $\tau + \varphi = 90^\circ = \theta + \varphi$, 我們有 $\tau = \theta$。於是因爲$\varphi = \angle CAD = \alpha + \theta$, 得到 $\varphi - \alpha = \tau = \theta$。使用正切等式得到:

$$\frac{c-a}{b} = \tan(\tau) = \tan(\varphi-\alpha) = \frac{\tan(\varphi)-\tan(\alpha)}{1+\tan(\varphi)\cdot\tan(\alpha)} = \frac{\frac{b}{c-a}-\frac{a}{b}}{1+\frac{b}{c-a}\cdot\frac{a}{b}}.$$

化簡後得到畢氏定理。

因此, 在 Jackson-Johnson 的 2023 年的證明之前, 早就有不少使用三角學證明畢氏定理的先例, 而且還相當簡單。



(a) 銳角　　(b) 鈍角

圖 11: Luzia 的證明

7.4. Luzia 的證明

Luzia 在 2015 年有一個很短的證明 [16], 但沒有出版, 這是另一個在 Jackson-Johnson 之前八年的畢氏等式的證明。先考慮一個銳角x (圖 11(a))。假設 $\triangle OC$ 是座標 x 軸, A 和 C 在單位圓上、而且 $\angle AOC = x$, 此地 O 爲座標軸原點。令 E 爲 O 到 $\overleftrightarrow{AC}$ 的垂足 (於是 E 爲 $\overline{AC}$ 的中點)、B 爲從 A 到 $\overleftrightarrow{OC}$ 的垂足, 而且 $\angle ACO = \varphi$。很明顯地, $\overline{OB} = \cos(x)$、$\overline{BC} = 1 - \cos(x)$。從直角三角形 $\triangle OEC$, 我們得到 $\varphi = 90^\circ - \frac{x}{2}$, 因此 $\sin(\varphi) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$、$\cos(\varphi) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, 而且 $\overline{EC} = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$, 從而 $\overline{AC} = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)$。從直角三角形 $\triangle ACB$ 得到 $\overline{BC} = \overline{AC}\cdot\cos(90^\circ - \varphi) = \overline{AC}\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$。因此

$$1-\cos(x) = \overline{BC} = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

從倍角等式, 我們有$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, 代入上式得到畢氏等式。請注意, 倍角等式來自角和等式, 因此並不需要用到畢氏定理或畢氏等式。

若 x 爲鈍角 (圖 11(b)), B 在線段 $\overline{OC}$ 之外, 於是 $\overline{OB} = -\cos(x)$, 所以 $\overline{BC} = \overline{BO} + \overline{OC} = 1 - \cos(x)$。上述證明仍然成立。最後, 若 θ 是直角三角形中的銳角, 令 $x = \frac{\theta}{2}$ 並且代入上面的證明就得到 $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$。

8. Jackson-Johnson 的 2023 年證明

本節簡單地介紹 Jackson-Johnson 的 2023 年用三角學證明畢氏定理的證明。筆者認爲這不是一個簡捷漂亮、而是相當複雜的證明 (和前述的證明比較)。此地的說明和原證明有些微差異, 有興趣的讀者不妨參考 [27] 和 Jackson-Johnson 的 2025 年的文章 [8, 9]。

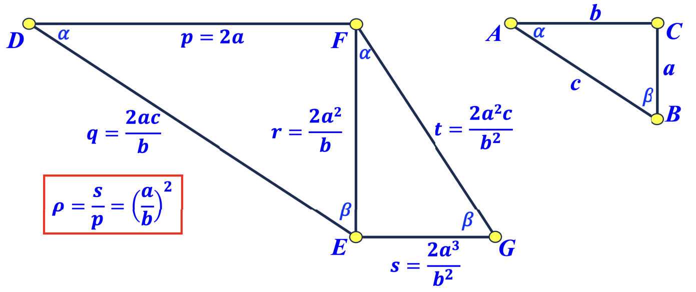
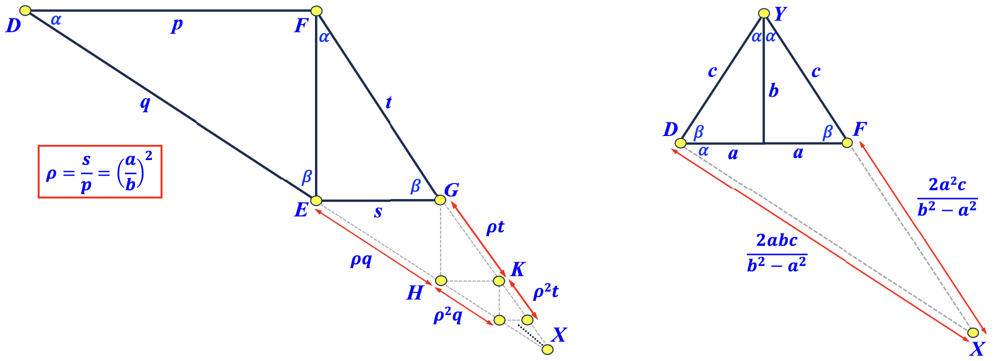


圖 12: Jackson-Johnson 證明 —第一階段

假設直角三角形 $\triangle ABC$ 兩個銳角爲 $\alpha < \beta$, 三邊爲 a、b 和 c (圖 12); $\alpha = \beta$ 這個特例容後再述。把直角三角形 $\triangle ABC$ 放大或縮小成直角三角形 $\triangle DEF$, 使得 $p = \overline{DF} = 2a$, 於是 $q = \overline{DE} = \frac{2ac}{b}$ 而且 $r = \overline{EF} = \frac{2a^2}{b}$。再把直角三角形 $\triangle ABC$ 放大或縮小成 $\triangle FGE$, 使得長直角邊 $\overline{AC}$ 放大或縮小後成爲直角三角形 $\triangle DEF$ 的短直角邊 $\overline{EF}$, 於是 $\triangle FGE$ 的短直角邊爲 $s = \overline{EG} = \frac{2a^3}{b^2}$、斜邊 $t = \overline{FG} = \frac{2a^2c}{b^2}$。這樣我們得到一個梯形, 上底爲 p、下底爲 s、左腰爲 q、右腰爲 t; 令 ρ 爲下底和上底的比值, 亦即 $\rho = \left(\frac{a}{b}\right)^2$。

因爲 $\alpha \neq \beta$, $\overleftrightarrow{DE}$ 和 $\overleftrightarrow{FG}$ 交於 X (圖 13(a))。作 $\overleftrightarrow{GH}$ 垂直於 $\overleftrightarrow{EG}$ 和 $\overleftrightarrow{DX}$ 交於 H, 自 H 作 $\overleftrightarrow{HK}$ 和 $\overleftrightarrow{GH}$ 垂直並且和 $\overleftrightarrow{FX}$ 在 K 相交, 我們得到一個新的、較小的梯形, 它的上底 $p = \overline{EG}$ 是梯形 $DEGF$ 的下底。因爲梯形 $EHKG$ 和梯形 $DEGF$ 相似, 梯形 $EGKH$ 各邊長和梯形 $DFGE$ 對應邊長的比例相同, 都是 ρ。所以 $\overline{EH} = \rho\overline{DE} = \rho \cdot q$ 而且 $\overline{GK} = \rho\overline{FG} = \rho \cdot t$。再使用相同的手續作梯形, 使下一個梯形的上底就是上一個梯形的下底, 這道手續可以無限繼續, 於是 $\overline{DX}$ 的長度就是各梯形左腰的和, 也就是:

$$\begin{aligned}\overline{DX} &= q + \rho(q) + \rho^2(q) + \cdots = q\left(1 + \rho + \rho^2 + \cdots\right)\\ &= q \cdot \frac{1}{1-\rho} = q \cdot \frac{b^2}{b^2 - a^2} = \frac{2abc}{b^2 - a^2}.\end{aligned}$$



(a)　　　　(b)

圖 13: Jackson-Johnson 證明 —第二階段

同樣地, $\overline{FX}$ 可以計算如下:

$$\overline{FX} = t + \rho(t) + \rho^2(t) + \cdots = \frac{2a^2c}{b^2 - a^2}.$$

在 $\overline{DF}$ 上作一個底角爲 β 的等腰三角形 $\triangle DFY$ (圖 13(b)), 於是它的頂角爲 2α、高爲 b、底邊長爲 $2a$、而且角 $\angle XDY = 90°$。這樣, 從直角三角形 $\triangle XDY$ 得到

$$\sin(2\alpha) = \frac{\overline{DX}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{DX}}{\overline{FY} + \overline{FX}} = \frac{\overline{DX}}{c + \overline{FX}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

再看$\triangle DYF$, 使用正弦定律得到 $\frac{\sin(2\alpha)}{2a} = \frac{\sin(\beta)}{c}$. 因爲 $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$, 所以

$$\sin(2\alpha) = \frac{2ab}{c^2}.$$

上面兩道 $\sin(2\alpha)$ 的式子必須相等, 因此得到畢氏定理。若 $a = b$, 三角形斜邊上的高爲 $\frac{1}{2}c$。於是三角形面積用直角邊計算爲 $\frac{1}{2}(a \cdot a) = \frac{1}{2}a^2$, 用斜邊和斜邊上的高計算則是 $\frac{1}{2}\left(c \cdot \frac{c}{2}\right)$。兩者相等, 因此得到$c^2 = 2a^2 = a^2 + a^2$。

這就是 Jackson-Johnson 在 2023 年用三角學對畢氏定理的「不可能」證明。平心而論, 這個證明長而複雜, 也很難說得上優美或有創見, 但卻比此前更短更直接的證明得到更多媒體的關注, 固然 21 世紀傳播業發達, 仍然讓筆者覺得有很強的炒作嫌疑。

9. 結論

本文針對一個傳了近百年的錯誤說法 (不可能用三角學證明畢氏定理) 做了歷史的回顧, 指出這個說法來自一本相當有名、在 1940 年出版的著作。然而, 從十九世紀後半開始就有三角學和解析幾何教科書不用畢氏定理或等式證明了正弦餘弦的角和角差等式, 由此立即可以證明畢氏等式, 當然也就證明了畢氏定理。本文接著討論二十世紀末的發展, 展示一些從 1996 年以

來簡單的畢氏定理和畢氏等式的證明, 其中包含了正切的角和角差等式以及用它們對畢式定理的證明。最後, 本文用 2023 年 Jackson-Johnson 的「不可能」證明做結束, 這不是第一個用三角學對畢氏定理的證明, 當然也不會是最後一個, 但這可能是第一個宣稱而且也被美國媒體大肆報導的「不可能」證明。日後若有機會, 我們會再用不同的角度探討這個在高中程度的有趣課題。更多而且更仔細的說明請參看 [28, 29]。

參考文獻

1. Alexander Bogomolny, *More Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem*, available at `https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/TrigProofs.shtml` (March 17, 2025參閱).
2. Augustus de Morgan, *Trigonometry and Double Algebra*, Cambridge University Press, London, 1849. (Available at `https://archive.org/details/trigonometrydoub00demoiala/page/22/mode/2up`)
3. Henry Burchard Fine and Henry Dallas Thompson, *Coordinate Geometry*, MacMillan, New York, 1911.
4. Osmar Fort, *Lehrbuch der Analytischen Geometrie*, Erster Teil: Analytische Geometrie der Ebene (Part One: Analytic Geometry of the Plane). Dritte Auflage (Third Edition), Teubner, Leipzig, 1872.
5. Alexander Givental, The Pythagorean Theorem: What Is It About? *The American Mathematical Monthly*, Vol. 113 (2006), No. 3 (March), pp. 261–265.
6. Sir Thomas L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Vol. 2 (Books III to IX), Translated from the Text of Heiberg, Volume I, Second Edition (Dover Edition), Dover Publications, New York, 1956.
7. E. W. Hobson, *A Treatise on Plane Trigonometry*, Cambridge University Press, London, 1891. (Available at `http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN578493403`)
8. Ne'Kiya D. Jackson and Calcea Rujean Johnson, *An Impossible Proof of Pythagoras*, AMS Spring Southeastern Sectional Meeting, March 18, 2023 (`https://meetings.ams.org/math/spring2023se/meetingapp.cgi/Paper/23621`).
9. Ne'Kiya D. Jackson and Calcea Rujean Johnson, Five or Ten New Proofs of the Pythagorean Theorem, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 131 (2024), No. 9 (October), p. 739–752.
10. Sidney H. Kung, Proof without Words: Tangent of the Sum, *Mathematics Magazine*, Vol. 81 (2008), No. 4 (October), p. 295.
11. Adrien-Marie Legendre, *Éléments de Géométrie*, Third Edition, Firmin DIDOT, 1800.
12. Zsolt Lengvárszky, The Pythagorean Theorem and the Angle Sum and Difference Identities, *Mathematics Magazine*, Vol. 91 (2018), No. 5 (December), pp. 380–381.
13. 劉毓璋。解析幾何詳論合訂本。1974。
14. S. L. Loney, *The Elements of Coordinate Geometry*, MacMillan, London, 1895.
15. Elisha Scott Loomis, *The Pythagorean Proposition*, 2nd edition, The National Council of Teachers of Mathematics, 1940. 網上可以找到 PDF 版, 這個連結是一種可能: `https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf`.

16. Nuno Luzia, Other Trigonometric Proofs of Pythagoras Theorem, *ArXiv*, 2015 (https://arxiv.org/pdf/1502.06628/).
17. Paul J. Maiorano, The Pythagorean Identity, *The Mathematics Teacher*, Vol. 91 (1998), No. 7 (October), pp. 620.
18. Rachel I. Mason, The Pythagorean Identity, *The Mathematics Teacher*, Vol. 89 (1996), No. 2 (February), pp. 149–150.
19. E. A. Maxwell, *Elementary Coordinate Geometry*, Second Edition, Oxford University Press, 1958.
20. Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words*, The Mathematical Association of America, 1993.
21. Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words II*, The Mathematical Association of America, 2000.
22. Roger B. Nelsen, *Proofs Without Words III*, The Mathematical Association of America, 2015.
23. Darren Orf, Teens Have Proven the Pythagorean Theorem With Trigonometry. That Should Be Impossible, *Popular Mechanics*, March 31, 2023 (https://www.popularmechanics.com/science/math/a43469593/high-schoolers-prove-pythagorean-theorem-using-trigonometry/).
24. Guanshen Ren, Proof Without Word: $\tan(\alpha - \beta)$, *The College Mathematics Journal*, Vol. 30 (1999), No. 3 (May), p. 212.
25. A. Robson, *An Introduction to Analytic Geometry*, Volume 1, Cambridge University Press, London, 1940.
26. Friedrich Schur, *Lehrbuch Der Analytischen Geometrie*, DE Gruyter Gmbh, 1899, Reprinted 2021 of the 1912 edition.
27. Ching-Kuang Shene, [冼鏡光初等幾何講堂] 畢氏定理三講。
EP4: 一個流傳了百來年的錯誤說法 (https://youtu.be/JqCQK1kHjKM)、
EP5: 新的證明方式 (https://youtu.be/7aq4iSdk3d4)、
EP6: 兩位美國高中生的 “不可能 ”證明 (https://youtu.be/WAST6MpPPz4)。
一篇完整的介紹性文章 (英文) 在此: https://pages.mtu.edu/~shene/VIDEOS/GEOMETRY/004-Pythagorean-Thm/Pythagorean.pdf、
其它類似教學影片在此:https://pages.mtu.edu/~shene/VIDEOS/index.html。
28. Ching-Kuang Shene, Trigonometric Proofs of the Pythagorean Identity, (第一版2025年4月10日) https://pages.mtu.edu/~shene/VIDEOS/GEOMETRY/004-Pythagorean-Thm/Pythagorean.pdf。
29. Ching-Kuang Shene, Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem and Identity, (第一版 2025 年 9 月 22 日。 這個網站是上一份的網路版, 兩者的更新互有先後, 請注意更新的時間。) https://pages.mtu.edu/~shene/VIDEOS/GEOMETRY/GEO-HTML/Tri-Proofs/Trig-Proofs.html。
30. Leila Sloman, 2 High School Students Prove Pythagorean Theorem. Here's What That Means, *Sci. Amer.*, Apr. 10, 2023 (https://www.scientificamerican.com/article/2-high-school-students-prove-pythagorean-theorem-heres-what-that-means/).
31. Leonard M. Smiley, Proof without Words: Geometry of Subtraction Formulas, *Mathematics Magazine*, Vol. 72 (1999), No. 5 (December), pp. 366.

32. Leonard M. Smiley, Geometry of Addition and Subtraction Formulas, 1999 (https://math.uaa.alaska.edu/~smiley/trigproofs.html).
33. Fukuzo Suzuki, Proof without Words: The Difference Identity for Tangents, *Mathematics Magazine*, Vol. 72 (1999), No. 4 (October), p. 276.
34. Ramon Antonio Vargas, US teens say they have new proof for 2,000-year-old mathematical theorem, *The Gaurdian*, March 24, 2023 (https://www.theguardian.com/us-news/2023/mar/24/new-orleans-pythagoras-theorem-trigonometry-prove).
35. J. Versluys, *Zes en negentig bewijzen voor het theorema van Pythagoras*, Versluys, Amsterdam, 1914 (available at https://uvaerfgoed.nl/viewer/image/11245_3_34862/98/)
36. Jason Zimba, On the Possibility of Trigonometric Proofs of the Pythagorean Theorem, *Forum Geometricorum: A Journal on Classical Euclidean Geometry*, Vol. 9 (2009), pp. 275–278.

—本文作者爲美國密西根理工大學計算機科學系名譽教授—